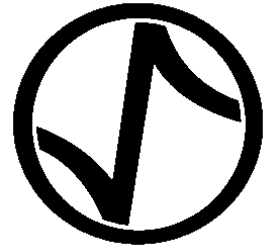


ATCP do Brasil

Soluções Piezoelétricas



Apostila 2 da fase 1

Efeito Piezoelétrico e as Cerâmicas Piezoelétricas

Do curso:
Materiais e Dispositivos Piezoelétricos:
Fundamentos e Desenvolvimento

São Carlos – 2004

ÍNDICE

ÍNDICE.....	2
1. INTRODUÇÃO	3
2. EFEITO PIEZOELÉTRICO DIRETO.....	5
3. EFEITO PIEZOELÉTRICO INVERSO.	10
4. REDUÇÃO DO NÚMERO DE COEFICIENTES INDEPENDENTES POR SIMETRIA NO CRISTAL.	11
4.1. CASOS TRIGONAL E HEXAGONAL.	14
5. TÉCNICAS EXPERIMENTAIS DE MEDIÇÕES PIEZOELÉTRICAS.....	17
5.1. MÉTODO DE RESSONÂNCIA.	17
5.2. MÉTODO ESTÁTICO.....	19
6. ALGUMAS APLICAÇÕES DOS MATERIAIS PIEZOELÉTRICOS.	19

1. INTRODUÇÃO

Em geral, uma força externa aplicada a um sólido (stress), causa uma deformação proporcional no material (strain), relacionada pelo modulo elástico $\sigma = Y\varepsilon$.

A piezoelectricidade corresponde a presença de uma carga elétrica adicional, devido à aplicação desta força. Este fenômeno é chamado de efeito piezoelétrico direto, onde a carga é proporcional à força realizada sobre o sólido (ver Figura 1).

Em termos de polarização elétrica P e stress σ , podemos escrever:

$$P = d\sigma \quad \dots (1)$$

Alem disso, existe um efeito piezoelétrico inverso, que consiste na aparição de uma deformação no sólido, devido à aplicação de um campo elétrico. Esta deformação pode ser uma expansão ou contração dependente da polaridade do campo aplicado (ver Figura 1).

Desta forma é valida a seguinte relação entre o campo elétrico E e a deformação ou strain (ε).

$$\varepsilon = dE \quad \dots(2)$$

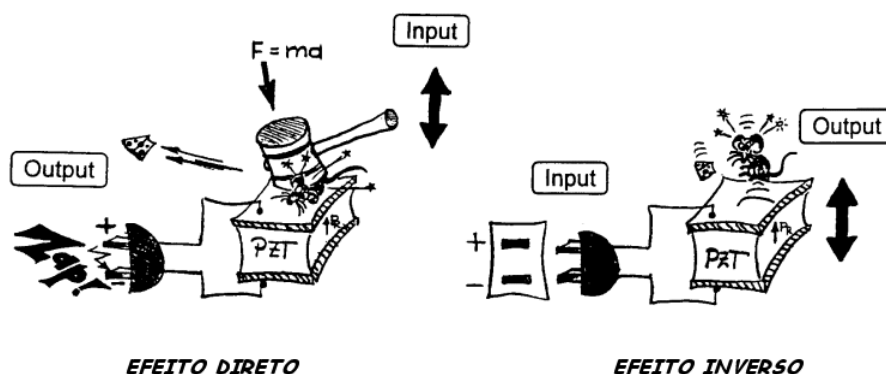


Figura 1. Representação esquemática do efeito piezoelétrico direto e inverso

A constante de proporcionalidade que aparece em ambos efeitos é a mesma, sendo chamada de coeficiente piezoelétrico. Valores elevados do coeficiente piezoelétrico “d” são procurados em materiais destinados a desenvolver movimentos de vibração, como é o caso de transdutores ultra-sônicos limpadores.

Outra constante piezoelétrica usada com frequência é “g”, que nos proporciona o valor do campo elétrico produzido pelo sólido, como resposta a uma força externa ou stress. Esta constante pode ser relacionada com “d” da seguinte forma:

$$g = \frac{d}{\kappa} = \frac{d}{\kappa' \kappa_0} \quad \dots(3)$$

Onde κ , κ_0 y κ' , são as permissividades elétricas no meio, no vácuo e a relativa, respectivamente.

Valores altos do coeficiente “g” são desejados em materiais destinados a gerar corrente em resposta a uma tensão mecânica.

Constantes piezoelétricas adicionais, como “e”, que relaciona o stress σ com o campo elétrico E e “h”, relacionando o strain ϵ com o campo E, são usadas só em ocasiões específicas.

$$\sigma = -eE \quad \dots(4)$$

$$E = -h\epsilon \quad \dots(5)$$

As constantes piezoelétricas podem ser definidas como derivadas parciais, estimadas a stress constante (livre), campo constante (corto circuito), deslocamento elétrico constante (circuito aberto) e strain constante (fixo).

$$d = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial E} \right)_{\sigma} = \left(\frac{\partial D}{\partial \sigma} \right)_{E} \quad \dots(6)$$

$$g = \left(-\frac{\partial E}{\partial \sigma} \right)_{D} = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial D} \right)_{\sigma} \quad \dots(7)$$

$$e = \left(-\frac{\partial \sigma}{\partial E} \right)_{\epsilon} = \left(\frac{\partial D}{\partial \epsilon} \right)_{E} \quad \dots(8)$$

$$h = \left(-\frac{\partial \sigma}{\partial D} \right)_{\epsilon} = \left(-\frac{\partial E}{\partial \epsilon} \right)_{D} \quad \dots(9)$$

Existe também outra grandeza física que nos proporciona um valor da potencialidade de nosso material como piezoelétrico, chamado de fator de acoplamento eletro-mecânico K. Este fator corresponde à fração da energia elétrica total, que é convertida em energia mecânica e vice-versa.

$$K^2 = \frac{\text{energia..eletrica..convertida..a..energia..mecânica}}{\text{energia..eletrica..total}} \quad \dots(10)$$

$$K^2 = \frac{\text{energia..mecânica..convertida..a..energia..eletrica}}{\text{energia..mecânica..total}} \quad \dots(11)$$

O fator de acoplamento eletro-mecânico é uma quantidade sempre menor que um. No quadro abaixo podemos observar alguns valores desta grandeza para diferentes materiais.

	quartzo	Titanato de Bário (cerâmicas)	Pb(Ti,Zr)O ₃ (cerâmicas)	Sal de Rochelle (24°C)
K	0.10	0.4	0.5-0.7	0.9

Para cerâmicas e cristais, as constantes elásticas, dielétricas e piezoelétricas, podem diferir ao longo das diferentes direções, por este motivo, estas são expressas e estudadas em forma de tensores. Desta forma, o estudo do efeito piezoelétrico neste trabalho foi realizado, levando-se em conta esta consideração.

2. EFEITO PIEZOELÉTRICO DIRETO.

Em geral, um estado de stress pode ser descrito por um tensor de segunda ordem (nove componentes), por outra parte, a polarização de um cristal é um vetor ou um tensor de primeira ordem, portanto é descrito com 3 componentes. Vejamos agora de forma mais elaborada o significado de stress.

Suponhamos um elemento de volume, situado em um corpo em estado de stress, devido a uma força externa aplicada sobre ele, figura 2. Sobre esse elemento de volume haverá forças atuando, que são proporcionais à área do elemento e são exercidas pelo material que o rodeia. Esta força por unidade de área é chamada de stress.

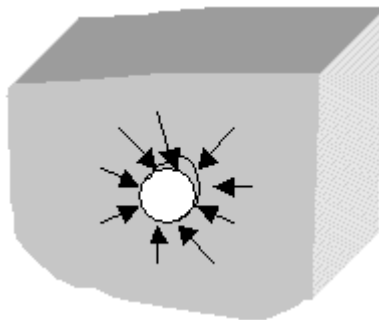


Figura 2. Corpo estressado.

O stress é chamado de homogêneo se as forças que atuam sobre a superfície do elemento de forma fixa, não são dependentes da posição do elemento no corpo.

Levando-se em conta as seguintes situações:

1. Stress homogêneo em todo o corpo.
2. Todas as partes do corpo se encontram em equilíbrio estático.
3. Presença de torques internos no corpo.

Suponhamos agora um corpo em forma de cubo, Figura 3.

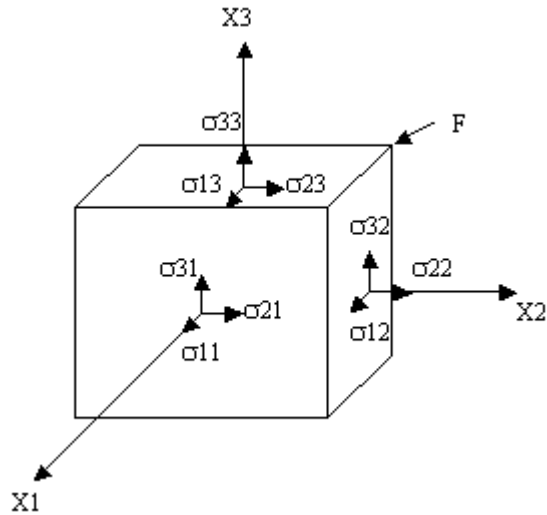


Figura 3. Componentes do tensor stress.

Analisando as fases do cubo em direção ao sentido positivo dos eixos coordenados, chamamos por σ_{12} , por exemplo, à força transmitida em direção X_1 , na fase perpendicular a X_2 .

Sabendo-se que o stress é homogêneo, então as forças transmitidas nas faces opostas do cubo são equivalentes e opostas às mostradas na Figura 3. Os valores positivos de σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} (componentes normais), implicam em tensão e os negativos, compressão.

Vejamos como se comportam os momentos de força ou torques, tomando como eixo de rotação X_3 , Figura 4.

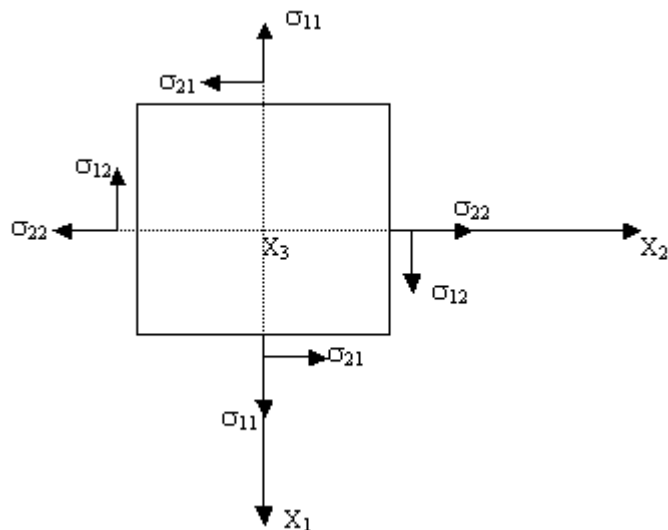


Figura 4. Vista superior do corpo em estado de stress representado na Figura 3.

Como o stress é homogêneo, os três componentes da força em cada face, podem ser representados no ponto médio da face, então nenhuma das componentes perpendiculares às faces, nem as componentes tangenciais na face perpendicular a X_3 , têm torques relacionados a este eixo. Apenas σ_{12} e σ_{21} que por condição de equilíbrio, devem apresentar valores iguais. Em geral, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ no tensor stress.

Se nós temos um cristal piezoelétrico em estado de stress, em geral, cada componente da polarização P_i , vai estar afetada linearmente por todas as componentes do tensor stress σ_{ij} .

$$P_1 = d_{111}\sigma_{11} + d_{112}\sigma_{12} + d_{113}\sigma_{13} + d_{121}\sigma_{21} + d_{122}\sigma_{22} + d_{123}\sigma_{23} + d_{131}\sigma_{31} + d_{132}\sigma_{32} + d_{133}\sigma_{33} \quad \dots(12)$$

De forma similar para as componentes da polarização P_2 e P_3 . A equação (12) pode ser escrita de forma resumida como a seguir:

$$P_1 = d_{1JK} \sigma_{JK}, \text{ de igual forma } P_2 = d_{2JK} \sigma_{JK} \text{ e } P_3 = d_{3JK} \sigma_{JK}$$

Em geral

$$P_i = d_{iJK} \sigma_{JK} \quad \dots(13)$$

onde d_{iJK} , são as 27 componentes do tensor de ordem 3, chamado coeficiente piezoelétrico.

Significado físico dos d_{iJK} .

A aplicação de uma tensão uniaxial dada por σ_{11} em nosso cristal, resultará em uma polarização com as seguintes componentes.

$$P_1 = d_{111} \sigma_{11}, \quad P_2 = d_{211} \sigma_{11} \quad \text{e} \quad P_3 = d_{311} \sigma_{11}$$

Então, conhecendo os valores de P_1 , P_2 e P_3 , pode-se encontrar d_{111} , d_{211} , e d_{311} .

Suponhamos agora, uma torção sobre a face perpendicular a X_3 . Seguindo a representação da Figura 2, podemos observar que apenas as componentes σ_{12} e σ_{21} , terão momento de força.

Sendo assim, P_1 pode ser obtido por:

$$P_1 = d_{112} \sigma_{12} + d_{121} \sigma_{21}$$

$$\text{mas } \sigma_{12} = \sigma_{21}, \text{ então } P_1 = (d_{112} + d_{121}) \sigma_{12}$$

Neste caso, pode-se observar que $(d_{112} + d_{121})$ tem um significado físico bem definido, mas é impossível desenvolver um experimento para separar ambos coeficientes.

A seguir, vamos considerar $d_{ijk} = d_{ikj}$, e o desenvolvimento posterior mostrará a validade deste resultado.

Como mencionado anteriormente, os 27 números representando uma grandeza física, constituem em um tensor de terceira ordem, mas para fazer esta afirmação, é preciso que o tensor se transforme da seguinte forma ao mudar os eixos coordenados.

$$T_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn} \quad \dots(14)$$

Como a polarização é um vetor, que pode ser representado por um tensor de primeira ordem, então podemos mudar os eixos $P_i' = a_{il} P_l$. De forma similar é possível transformar um tensor de segunda ordem como stress $\sigma_{mn} = a_{jm} a_{kn} \sigma'_{jk}$, então.

$$P_i' = a_{il} P_l = a_{il} d_{lmn} \sigma_{mn} = a_{il} a_{jm} a_{kn} d_{lmn} \sigma'_{jk} = d'_{ijk} \sigma'_{jk},$$

Então $d'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} d_{lmn}$, que é a relação que estávamos procurando.

Um tensor deste tipo, em geral tem 27 componentes independentes. Se suas componentes estão escritas de forma explícita, a representação será em forma de cubo com 3 camadas, como mostra a figura 5.

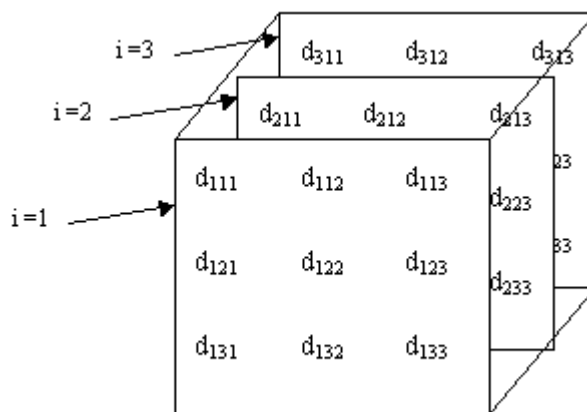


Figura 5. Representação de um tensor de ordem 3.

O fato de que d_{ijk} seja simétrico em j e k , possibilita reduzir o tensor a 18 componentes independentes. Existe uma notação mais resumida para um tensor, conhecida como notação matricial como a descrita abaixo.

Notação tensorial

$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$d_{111} \ d_{112} \ d_{113}$	$d_{211} \ d_{212} \ d_{213}$	$d_{311} \ d_{312} \ d_{313}$
$d_{122} \ d_{123}$	$d_{222} \ d_{223}$	$d_{322} \ d_{323}$
d_{133}	d_{233}	d_{333}

Notação Matricial

i = 1	i = 2	i = 3
d_{11}	d_{21}	d_{31}
$\frac{1}{2}d_{16}$	$\frac{1}{2}d_{26}$	$\frac{1}{2}d_{36}$
$\frac{1}{2}d_{15}$	$\frac{1}{2}d_{25}$	$\frac{1}{2}d_{35}$
d_{12}	d_{22}	d_{32}
$\frac{1}{2}d_{14}$	$\frac{1}{2}d_{24}$	$\frac{1}{2}d_{34}$
d_{13}	d_{23}	d_{33}

Nesta transformação o primeiro sufixo é mantido e os dois ultimos mudam da seguinte forma:

11	22	33	23,32	31,13	12,21
↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5	6

Seguindo a mesma lógica

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ \sigma_4 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Desta forma

$$P_1 = d_{11}\sigma_1 + \frac{1}{2}d_{16}\sigma_6 + \frac{1}{2}d_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2}d_{16}\sigma_6 + d_{12}\sigma_2 + \frac{1}{2}d_{14}\sigma_4 + \frac{1}{2}d_{15}\sigma_5 + \frac{1}{2}d_{14}\sigma_4 + d_{13}\sigma_3$$

Ou

$$P_1 = d_{11}\sigma_1 + d_{12}\sigma_2 + d_{13}\sigma_3 + d_{14}\sigma_4 + d_{15}\sigma_5 + d_{16}\sigma_6$$

De maneira geral pode -se escrever $P_i = d_{ij} \sigma_j$ ($i = 1,2,3$ $j = 1,2,3,4,5,6$)

Então a matriz pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix}$$

Cada linha da matriz representa uma camada da representação tensorial.

3. EFEITO PIEZOELÉTRICO INVERSO.

Se um campo elétrico é aplicado a um cristal piezoelétrico, a forma deste muda. Este fenômeno é conhecido como efeito piezoelétrico inverso.

Existe uma relação linear entre as componentes do vetor intensidade do campo elétrico E_i e as componentes do tensor strain, que é a grandeza física que descreve esta deformação.

Alem disso, os coeficientes que ligam o campo elétrico e o strain no efeito piezoelétrico inverso, são os mesmos que ligam o stress e a polarização no efeito direto.

$$\text{Efeito direto} \quad \rightarrow \quad P_i = d_{ijk} \sigma_{jk} \quad \dots(15)$$

$$\text{Efeito inverso} \quad \rightarrow \quad \epsilon_{jk} = d_{ijk} E_i \quad \dots(16)$$

Tensor strain

Suponhamos uma corda flexível que sofreu um pequeno estiramento e chamemos e_{11} à deformação por unidade de longitude no eixo X_1 , Figura 6.

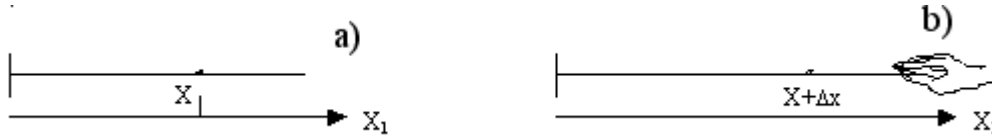


Figura 6. Corda. a) Sem tensão. b) Após realizar uma tensão sobre ela.

Analisemos o caso de um elemento de longitude paralelo a X_2 , que realiza uma rotação sobre o eixo X_3 em direção a X_1 , Figura 7. Esta rotação será definida como e_{12} . Desta forma teremos uma matriz com 9 componentes e_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3$).

O tensor strain $[\epsilon_{ij}]$ está definido como a parte simétrica de $[\epsilon_{ij}]$.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}) \quad \dots(17)$$

Assim, se tem que ϵ_{jk} é um tensor simétrico em j e k ; a equação 16, portanto, nos conduz ao fato de que d_{ijk} é simétrico em j e k , resultado que já havíamos antecipado na análise do efeito piezoelétrico direto.

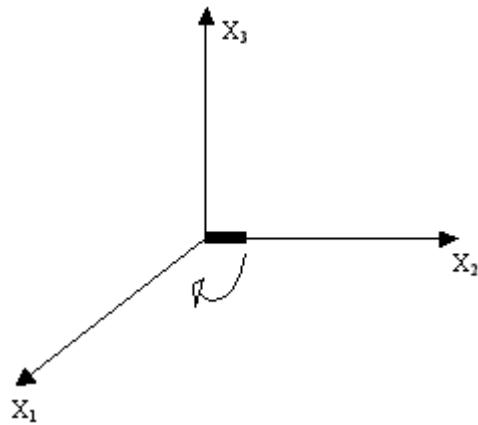


Figura 7. Rotação de um elemento de longitude paralelo a X_2 , que realiza uma rotação sobre o eixo X_3 em direção a X_1 (e_{12}).

As componentes do tensor strain são dadas por:

$$\epsilon_{11} = d_{111} E_1 + d_{211} E_2 + d_{311} E_3 \quad \dots(18)$$

$$\epsilon_{12} = d_{112} E_1 + d_{212} E_2 + d_{312} E_3 \quad \dots(19)$$

de forma análoga pode-se obter as demais componentes.

Em notação matricial e de forma geral se terá: $\epsilon_j = d_{ij} E_i$ ($i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,\dots,6$)

No seguinte esquema, se resumem as equações piezoelétricas em notação matricial.

		ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	ϵ_5	ϵ_6
		σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
E_1	P_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
E_2	P_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}
E_3	P_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}	d_{36}

4. REDUÇÃO DO NÚMERO DE COEFICIENTES INDEPENDENTES POR SIMETRIA NO CRISTAL.

Os coeficientes independentes do tensor piezoelétrico podem ser reduzidos, levando-se em conta a simetria do cristal.

O princípio do método é transformar os eixos de referência do tensor por um dos elementos de simetria do cristal. Para ilustrar, consideremos um cristal centrossimétrico

(simetria de inversão). Então as matrizes para transformar os eixos serão $a_{ij} = -\delta_{ij}$. As componentes do tensor piezoelétrico mudarão de eixos pela seguinte relação:

$$d'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} d_{lmn} = -\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} d_{lmn}$$

$$d'_{ijk} = -d_{ijk}$$

Mas, pelo fato do cristal apresentar simetria de inversão $d'_{ijk} = d_{ijk}$, então $d_{ijk} = 0$.

Como segundo exemplo, consideremos um eixo de simetria de segunda ordem ou de 180° . Se nós realizamos uma rotação de 180° , ao redor desse eixo, as propriedades do cristal permanecerão invariáveis. Vamos supor agora, o eixo de simetria de ordem 2, paralelo a X_3 como mostra a Figura 8:

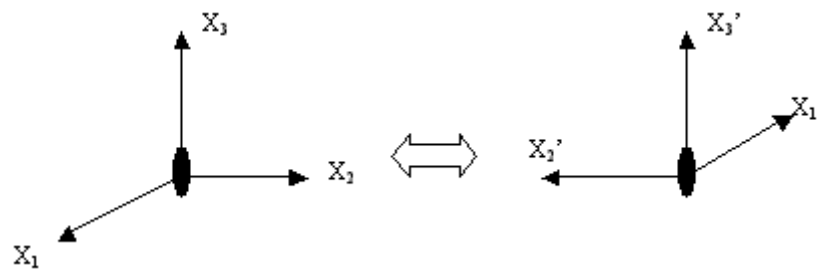


Figura 8. Eixo de simetria de ordem 2, paralelo a X_3 .

$$X_1' \rightarrow -X_1; \quad X_2' \rightarrow -X_2 \quad e \quad X_3' \rightarrow X_3$$

Analisando então os coeficientes d_{ijk} , por exemplo:

$d'_{123} = (-1)(-1)(1) d_{123}$ ou $d'_{123} = d_{123}$; o coeficiente d_{123} , é diferente de zero. Agora, faremos o mesmo com d'_{133} :

$$d'_{133} = (-1)(1)(1) d_{133} \text{ ou } d'_{133} = -d_{133}$$

mas como há simetria de ordem 2 e os eixos foram rotados a 180° , d'_{133} deverá ser igual a d_{133} .

$$d'_{133} = -d_{133} = d_{133}, \text{ então } d_{133} = 0$$

Seguindo o mesmo procedimento, pode-se analisar cada um dos valores d_{ijk} . Em notação tensorial ficará:

$$\begin{array}{ccccccc} d_{111} = 0 & d_{112} = 0 & d_{113} & 0 & 0 & d_{213} & d_{311} & d_{312} & 0 \\ & d_{122} = 0 & d_{123} & & 0 & d_{223} & & d_{322} & 0 \\ & & d_{133} = 0 & & & 0 & & & d_{333} \end{array}$$

Em notação matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix}$$

Vamos ver um exemplo deste método para um cristal com simetria $\bar{4}2m$. O eixo de rotação de ordem 4, paralelo a X_3 , tem incluído um eixo de segunda ordem, também paralelo a X_3 , como é mostrado na Figura 9.

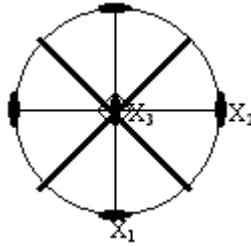


Figura 9. Simetria $\bar{4}2m$.

Sabemos que para um eixo de rotação de ordem 2, não se anulam somente os coeficientes d_{14} , d_{15} , d_{24} , d_{25} , d_{31} , d_{32} , d_{33} e d_{36} , portanto somente eles serão tomados em consideração a seguir. A notação $\bar{4}$, significa que existe simetria, após uma rotação de 90° , seguida por uma operação de inversão, portanto os eixos se transformam da seguinte forma:

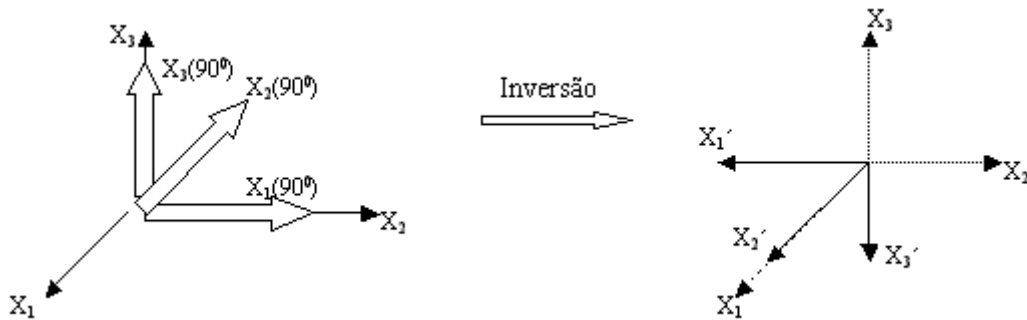


Figura 10. Transformação de eixos ao realizar a operação de simetria $\bar{4}$

$$1 \rightarrow -2; \quad 2 \rightarrow 1 \quad \text{e} \quad 3 \rightarrow -3 \quad (\text{Figura 10}).$$

Então:

$$d_{113} = -d_{223} \quad d_{213} = d_{123} \quad d_{311} = -d_{322} \quad d_{312} = d_{321}$$

$$d_{123} = d_{213} \quad d_{223} = -d_{113} \quad d_{322} = -d_{311} \quad d_{333} = -d_{333}$$

Agora consideremos o eixo de rotação paralelo a X_1 . Podemos notar, que ao considerarmos um eixo de rotação de ordem 2, paralelo a X_3 , todos os coeficientes d_{ijk} onde $i, j, k \neq 3$ ou $i =$

$j = 3$ ou $i = k = 3$ ou $k = j = 3$, se anulam. De forma análoga, um eixo de rotação de ordem 2, paralelo a X_1 , anulará todos os coeficientes que cumpram $i, j, k \neq 1$ ou $i = j = 1$ ou $i = k = 1$ ou $k = j = 1$. Desta forma, somente ficarão os coeficientes:

$$d_{123} = d_{213} ; d_{312} = d_{321} \text{ ou seja } d_{14} = d_{25} ; d_{36}.$$

Sendo assim, a matriz ficará:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

4.1. CASOS TRIGONAL E HEXAGONAL.

Ate agora vimos que ao fazer uma operação de simetria, um eixo se transforma em outro ou nele mesmo (pode ser com sinal invertido). No caso de classe 3 e 6, é impossível rotar o sistema com respeito a um eixo 120° ou 60° e obter os novos eixos acima dos antigos, neste caso procede-se de forma diferente. O principio é exatamente o mesmo descrito anteriormente, ou seja, transformar os eixos pela operação do elemento de simetria do cristal e igualar os velhos coeficientes com os novos. Analisemos um exemplo para simetria de ordem 3, Figura 11, a matriz da transformação fica:

	X_1	X_2	X_3
X'_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
X'_2	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
X'_3	0	0	1

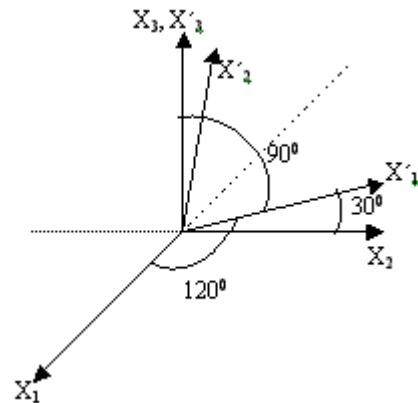


Figura 11. Rotação de 120° nos eixos coordenados.

Desta forma cada d'_{ijk} ficará de maneira geral como combinação linear dos 18 elementos da matriz. Vejamos um exemplo para facilitar a compreensão:

$$d'_{111} = X_1^3 d_{111} + X_1^2 X_2 d_{112} + X_1 X_2^2 d_{122} + X_2 X_1^2 d_{211} + X_2^2 X_1 d_{212} + X_2^3 d_{222} \dots (20)$$

Para o caso do coeficiente d'_{111} , todos os valores de X_i , são tomados da linha X'_1 , da matriz de transformação. Fazendo-se para o caso do coeficiente d'_{211} , o procedimento será o seguinte:

- O primeiro valor de X_i , para cada coeficiente d_{ijk} , pegaremos da linha X'_2 , da matriz de transformação.
- Os dois últimos valores de X_i , para cada coeficiente d_{ijk} , pegaremos da linha X'_1 , da matriz de transformação.

Desta forma pode-se obter para o coeficiente d'_{211} , a seguinte equação:

$$d'_{211} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)d_{111} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d_{112} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d_{122} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)d_{211} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d_{212} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d_{222} = d_{211}$$

ou

$$d'_{211} = -\frac{\sqrt{3}}{8}d_{111} + \frac{3}{8}d_{112} - 3\frac{\sqrt{3}}{8}d_{122} - \frac{1}{8}d_{211} + \frac{\sqrt{3}}{8}d_{212} - \frac{3}{8}d_{222} = d_{211} \quad \dots(21)$$

Os coeficientes d_{ijk} , onde algum dos sufixos $i, j, k = 3$, não aportam para os d'_{ijk} onde $i, j, k \neq 3$, devido à relação dada pela matriz de transformação.

De forma análoga vai-se obter uma equação similar à equação (19) para cada um dos coeficientes d'_{111} , d'_{112} , d'_{122} , d'_{211} , d'_{212} , d'_{222} , chegando a um sistema de equações de 6×6 que pode ser calculado. Os coeficientes d_{ijk} , onde alguns dos sufixos $i, j, k = 3$, também podem ser calculados da mesma forma.

As soluções ficam da seguinte maneira:

$$d_{111} = -d_{122} = -\frac{d_{212}}{2} \quad ; \quad d_{222} = -\frac{d_{112}}{2} = -d_{211} \quad d_{113} = d_{233} \quad ; \quad d_{123} = -d_{213} \quad ; \quad d_{311} = d_{322}$$

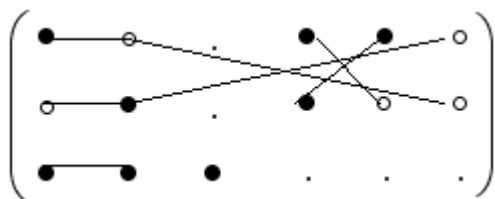
$$d_{133} = d_{233} = d_{312} = d_{313} = d_{323} = 0$$

Em notação matricial é:

$$d_{11} = -d_{12} = -\frac{d_{26}}{2} \quad ; \quad d_{22} = -\frac{d_{16}}{2} = -d_{21} \quad d_{15} = d_{24} \quad ; \quad d_{14} = -d_{25} \quad ; \quad d_{31} = d_{32}$$

$$d_{13} = d_{23} = d_{36} = d_{35} = d_{34} = 0$$

A representação fica:



Agora vejamos o significado físico real destas matrizes. Para exemplificar consideremos o quartzo. À temperatura ambiente, o quartzo tem estrutura trigonal com simetria classe 32, Figura 12.

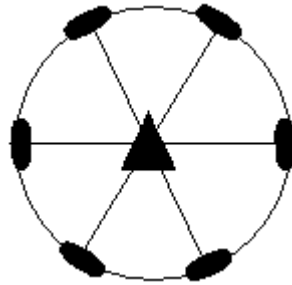


Figura 12. Simetria 32.

A matriz será dada por:

	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
\mathbf{P}_1	d_{11}	$-d_{11}$	0	d_{14}	0	0
\mathbf{P}_2	0	0	0	0	$-d_{14}$	$-2d_{11}$
\mathbf{P}_3	0	0	0	0	0	0

Em acordo com a simetria do quartzo, se nós aplicássemos uma tensão de estiramento σ_1 , paralelo ao eixo X_1 , aparecerá uma componente da polarização no material nessa mesma direção: $P_1 = d_{11} \sigma_1$; $P_2 = 0$; $P_3 = 0$

Por outro lado, se fazemos uma pressão compressiva σ_2 na direção X_2 ou uma torção σ_4 ao redor do eixo X_1 , produzirá também uma polarização paralela a X_1 . $P_1 = -d_{11} \sigma_2$; $P_2 = 0$; $P_3 = 0$ ou $P_1 = d_{14} \sigma_4$; $P_2 = 0$; $P_3 = 0$

Então concluindo, podemos obter uma polarização na direção X_1 , de diferentes formas.

- Tensão ao longo de X_1 .
- Compressão ao longo de X_2 .
- Uma torção ao redor do eixo X_1 .

De forma análoga, pode-se deduzir que uma polarização paralela ao eixo X_2 , só aparecerá se ocorre:

- Uma torção σ_5 ao redor do eixo X_2 . $P_1 = 0$; $P_2 = -d_{14} \sigma_5$; $P_3 = 0$
- Uma torção σ_6 ao redor do eixo X_3 . $P_1 = 0$; $P_2 = -2d_{11} \sigma_6$; $P_3 = 0$

O fato de que todas as componentes d_{ij} , na última linha da matriz, são iguais a zero, implica que nunca aparecerá uma polarização paralela ao eixo X_3 , devido a uma tensão (stress) sobre o cristal. Vejamos como poderia se interpretar o efeito inverso. Suponhamos um campo

elétrico E_1 , ao longo do eixo X_1 . A deformação nesta direção estará dada por $\varepsilon_1 = d_{11} E_1$, mas este campo elétrico deformará também o cristal ao longo da direção X_2 ($\varepsilon_2 = d_{11} E_1$) de forma que se ε_1 foi compressiva, então ε_2 é extensiva e vice-versa. Além disso, o cristal se torcerá ao redor de X_1 ($\varepsilon_4 = d_{14} E_1$).

5. TÉCNICAS EXPERIMENTAIS DE MEDIÇÕES PIEZOELÉTRICAS.

Na prática, existem dois métodos fundamentais para caracterizar um material piezoelétrico:

- Método da ressonância.
- Método estático.

5.1. MÉTODO DE RESSONÂNCIA.

O método de ressonância é baseado fundamentalmente no seguinte princípio. Ao submeter uma barra de material piezoelétrico a uma voltagem alternada, este começará a oscilar nas três dimensões do espaço com uma freqüência característica para cada modo de vibração, Figura 13.

Mas a forma de vibração dos 3 modos, dependerá das dimensões do cristal, de forma que $L = \lambda_L/2$; $t = \lambda_t/2$ e $d = \lambda_d/2$ (22)

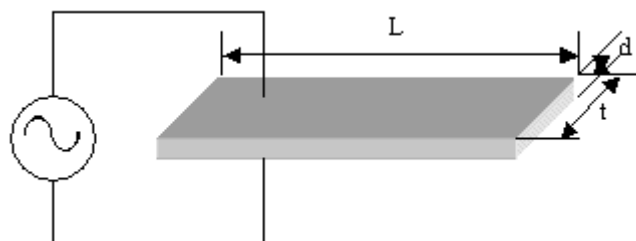


Figura 13. Barra piezoelétrica submetida a uma voltagem alternada.

É conhecido também, que para um ente oscilante, a velocidade se relaciona com a freqüência de oscilação. $v = \lambda f$, então:

$$V_L = 2L f_L \quad \dots(23)$$

$$V_t = 2t f_t \quad \dots(24)$$

$$V_d = 2d f_d \quad \dots(25)$$

Normalmente é difícil separar os diferentes modos de oscilação do cristal, só no caso onde $L \gg t \gg d$, de forma que $L/d > 40$, será possível observar que em freqüências menores

começará uma vibração transversal L , com o aumento da frequência, aparece então o modo de espessura d .

O equivalente elétrico da Figura 13 é um circuito RLC em série, paralelo com um capacitor C_0 que faz o papel dos contatos, a rama RLC é o material piezoelétrico, Figura 14. Com o aumento da frequência da fonte, chegaremos a um ponto onde o circuito RLC entrará em ressonância, situação que resulta na queda da impedância total do circuito. Ao aumentar a frequência pode-se chegar a um ponto onde os capacitores C , C_0 e a indutância L entram em ressonância, situação de máxima impedância do circuito.

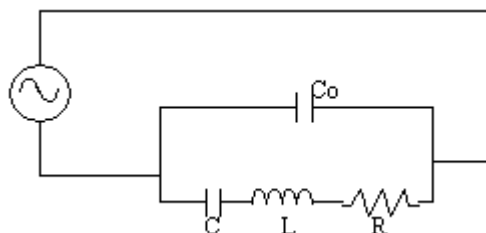


Figura 14. Equivalente elétrico de um material piezoelétrico submetido a um sinal alternado.

Na Figura 15, pode-se observar o gráfico de $\log(Z)$ em função da frequência. Veja os valores de frequência para a impedância mínima (ressonância) e impedância máxima (anti-ressonância).

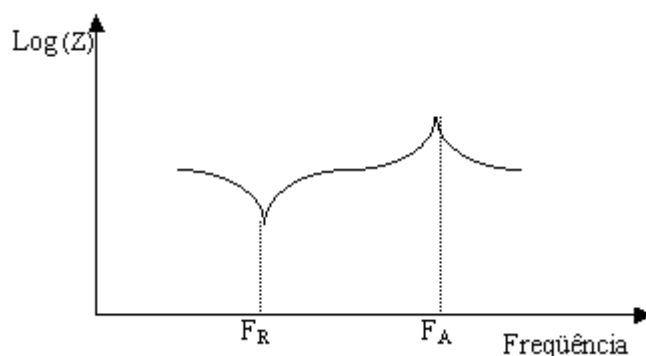


Figura 15. Comportamento da impedância com a variação da frequência para um circuito RLC em série, paralelo com um capacitor, submetido a um sinal alternado.

O gráfico representado na Figura 15, será obtido para cada modo de vibração em nosso material, de maneira que uma frequência de ressonância e anti-ressonância, poderá ser extraída para cada um dos modos.

A partir destas frequências poderão ser calculadas algumas das grandezas físicas que precisamos para realizar nossa caracterização, como por exemplo, o fator de acoplamento eletro-mecânico ou coeficiente piezoelétrico, em direções de interesse.

As deduções destas relações são complexas, devido a sua dependência com a forma do material e com os modos de vibração.

Para o caso que se está tratando (barras), se conhece que:

$$k_{31}^2 = \frac{\frac{\pi F_A}{2 F_R} \tan\left(\frac{\pi F_A - F_R}{2 F_R}\right)}{1 + \frac{\pi F_A}{2 F_R} \tan\left(\frac{\pi F_A - F_R}{2 F_R}\right)} \quad \dots(26)$$

onde K_{31} é o fator de acoplamento eletro-mecânico transversal.

Por outra parte se tem que:

$$K_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{S_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma} \quad \dots(27)$$

S^E → Constante elástica a campo elétrico constante.

ϵ^σ → Permissividade livre de stress.

5.2. MÉTODO ESTÁTICO.

Este método consiste simplesmente na aplicação de um campo elétrico estático a um material piezoelétrico, para observar a sua deformação em diferentes direções. A partir destas deformações pode-se obter os coeficientes piezoelétricos desejados. As relações freqüentemente utilizadas são:

$$d_{31} = \left(\frac{\partial D_3}{\partial \sigma_1}\right)_E = \left(\frac{\partial \epsilon_1}{\partial E_{31}}\right)_\sigma \quad \text{e} \quad d_{33} = \left(\frac{\partial D_3}{\partial \sigma_3}\right)_E = \left(\frac{\partial \epsilon_3}{\partial E_3}\right)_\sigma \quad \dots(28)$$

A forma de caracterizar um material piezoelétrico depende do uso a que será destinado. Se a aplicação será em vibradores, é mais conveniente sua caracterização pelo método de ressonância, mas se precisamos um atuador, então o método estático é o mais adequado.

6. ALGUMAS APLICAÇÕES DOS MATERIAIS PIEZOELÉTRICOS.

Os materiais piezoelétricos são amplamente utilizados na indústria. Suas propriedades os fazem importantes para uma grande quantidade de aplicações, das quais citaremos algumas:

Transdutores eletromecânicos. A propriedade de manter uma freqüência estável de vibração, ao ser submetido a um campo alternado, possibilita a colocação dos materiais

piezoelétricos em uma infinidade de aparelhos como: estabilizadores de frequência, relógios, instrumentos de medição de alta precisão, limpadores ultra-sônicos, etc.

Transdutores eletroacústicos. São usados para gerar informação em forma de ondas sonoras que serão propagadas em meios sólidos ou líquidos.

Filtros de ondas. Limitam a frequência de operação das redes elétricas.

Fontes de alta voltagem. Voltagens maiores a 100kV, tem sido geradas aplicando forças sobre materiais piezoelétricos.

Hidrofonos. As cerâmicas piezoelétricas têm a propriedade de recepção de ondas sonoras em água ou outros líquidos com propriedades similares.

Aplicações médicas. A propriedade de gerar e detectar ondas sonoras é usada em diagnósticos médicos. A reflexão destas ondas em interfaces entre diferentes corpos possibilita a detecção de corpos estranhos.

Microfones ultra-sônicos. A recepção de ondas de ultra-som os fazem importantes na fabricação de diversos aparelhos, por exemplo, controles remotos de equipamentos eletrodomésticos.